BAB II

BEBERAPA PENGERTIAN

2.1. BEDA MUKA DAN BEDA BELAKANG (FORWARD/BACKWARD DIFFERENCES)

1). BEDA MUKA (FORWARD DIFFERENCES)

Bila $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 + 2h)$, ...$f(x_0 + nh)$ adalah nilai-nilai dari $f(x)$, maka apabila dua suku yang berturutan dari $f(x)$ ialah $f(x_0 + h) - f(x_0)$, $f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)$, $f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h)$, ...$f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h)$, disebut beda dari $f(x)$.

Apabila beda dari $f(x)$ tersebut berturut-turut ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= f(x_0 + h) - f(x_0) \\
\Delta y_1 &= f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) \\
\Delta y_2 &= f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) \\
.. \quad & \quad .. \qquad .. \\
.. \quad & \quad .. \qquad .. \\
.. \quad & \quad .. \qquad .. \\
\Delta y_{n-1} &= f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h)
\end{aligned}$$

Dimana Δ disebut sebagai operator beda muka dan Δy_0, Δy_1, Δy_2, ... Δy_{n-1} disebut beda muka tingkat pertama.

Sedangkan selisih dari beda muka tingkat pertama disebut beda muka tingkat ke dua dan dapat ditulis sebagai $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$, ..., $\Delta^2 y_{n-1}$, di mana akan sama pula bila dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\
\Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \\
\Delta^2 y_2 &= \Delta y_3 - \Delta y_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\Delta^2 y_{n-1} & = & \Delta y_n - \Delta y_{n-1}
\end{array}
$$

Maka dengan cara yang sama, dapat didefinisikan beda muka tingkat ke tiga, beda muka tingkat ke empat dan seterusnya sampai tingkat ke n.

Sehingga dapat disajikan:

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 &= f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) - [f(x_0 + h) \\
&\quad - f(x_0)] \\
&= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) \\
\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 - [\Delta y_1 - \Delta y_0] \\
&= \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0 \\
&= f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) \\
&\quad - 2[f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)] \\
&\quad + f(x_0 + h) - f(x_0) \\
&= f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) \\
&\quad - f(x_0) \\
\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 - [\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0] \\
&= \Delta y_3 - \Delta y_2 - [\Delta y_2 - \Delta y_1] - [\Delta y_2 - \Delta y_1] \\
&\quad + [\Delta y_1 - \Delta y_0] \\
&= \Delta y_3 - 3\Delta y_2 + 3\Delta y_1 - \Delta y_0 \\
&= f(x_0 + 4h) - f(x_0 + 3h) \\
&\quad - 3[f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h)] \\
&\quad + 3[f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)] \\
&\quad - [f(x_0 + h) - f(x_0)] \\
&= f(x_0 + 4h) - 4f(x_0 + 3h) \\
&\quad + 6f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + f(x_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{(n-1)} y_1 - \Delta^{(n-1)} y_0 = \Delta^{(n-1)} f(x_0+h) - \Delta^{(n-1)} f(x_0)$$

Tabel berikut ini menunjuxkkan tabel beda muka (Forward Difference Table) dari tingkat pertama sampai tingkat ke lima.

Tabel Beda Muka

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	$y_0 = f(x_0)$					
		Δy_0				
x_1	$y_1 = f(x_0 + h)$		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	$y_2 = f(x_0 + 2h)$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	$y_3 = f(x_0 + 3h)$		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	$y_4 = f(x_0 + 4h)$		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	$y_5 = f(x_0 + 5h)$					

2). BEDA BELAKANG (BACKWARD DIFFERENCES)

Operator beda belakang (∇) didefinisikan sebagai
nabla atau del
berikut:

$$\nabla f(x_n) = \nabla f(x_0 + nh) = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h)$$

$$\nabla^2 f(x_n) = \nabla^2 f(x_0 + nh) = \nabla f(x_0 + nh) - \nabla f(x_0 + (n-1)h)$$

$$= f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) - [f(x_0 + (n-1)h) - f(x_0 + (n-2)h]$$

$$= f(x_0 + nh) - 2f(x_0 + (n-1)h) + f(x_0 + (n-2)h)$$

$$\nabla^3 f(x_n) = \nabla^3 f(x_0 + nh) = \nabla^2 f(x_0 + nh) - \nabla^2 f(x_0 + (n-1)h)$$

$$= \nabla f(x_0 + nh) - 2\nabla f(x_0 + (n-1)h) + \nabla f(x_0 + (n-2)h)$$

$$= f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) - 2[f(x_0 + (n-1)h) - f(x_0 + (n-2)h] + f(x_0 + (n-2)h) - f(x_0 + (n-3)h)$$

$$= f(x_0 + nh) - 3f(x_0 + (n-1)h) + 3f(x_0 + (n-2)h) - f(x_0 + (n-3)h)$$

.. ..

.. ..

.. ..

$$\nabla^n f(x_n) = \nabla^n f(x_0 + nh) = \nabla^{n-1} f(x_0 + nh) - \nabla^{n-1} f(x_0 + (n-1)h)$$

dimana: $\nabla f(x_n)$ disebut beda belakang tingkat pertama.

$\nabla^2 f(x_n)$ disebut beda belakang tingkat ke dua.

$\nabla^3 f(x_n)$ disebut beda belakang tingkat ke tiga.

.. ..

.. ..

.. ..

$\nabla^n f(x_n)$ disebut beda belakang tingkat ke n.

Tabel berikut menunjukkan, tabel beda belakang (Backward Difference table) dari tingkat pertama sampai dengan tingkat ke lima.

Tabel Beda Belakang

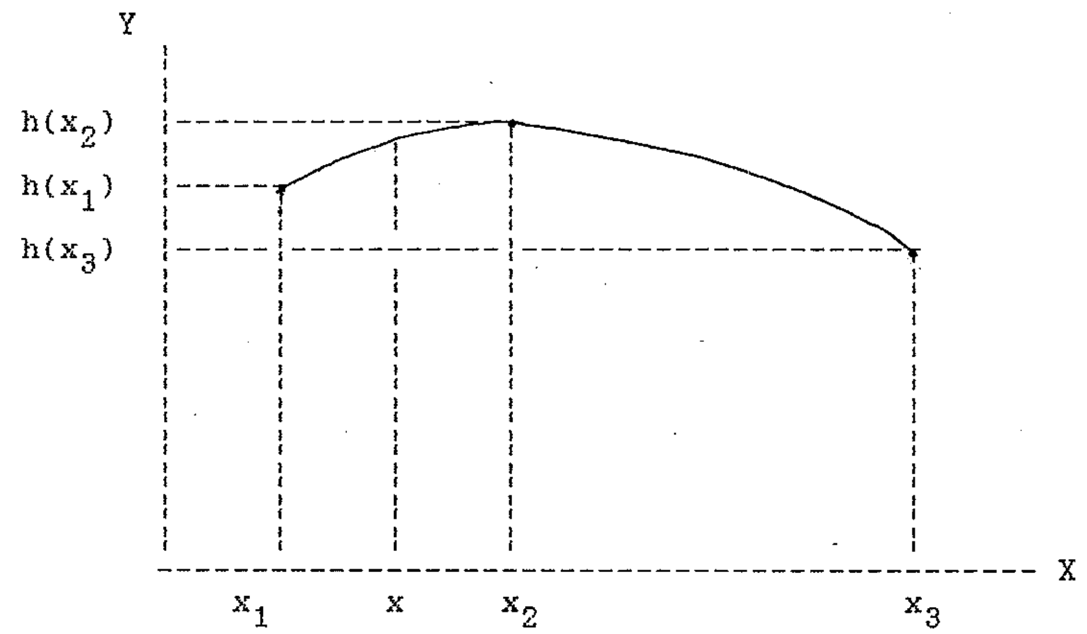
i	x_i	$y = f(x_i)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
n-5	x_0	$y_0 = f(x_0)$					
			∇y_1				
n-4	x_1	$y_1 = f(x_0 + h)$		$\nabla^2 y_2$			
			∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
n-3	x_2	$y_2 = f(x_0 + 2h)$		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
			∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$
n-2	x_3	$y_3 = f(x_0 + 3h)$		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
			∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
n-1	x_4	$y_4 = f(x_0 + 4h)$		$\nabla^2 y_5$			
			∇y_5				
n	x_5	$y_5 = f(x_0 + 5h)$					

2.2. INTERPOLASI POLINOM DERAJAT DUA

Untuk mencari harga pendekatan suatu fungsi dengan polinomial derajat dua, yang kita lakukan adalah memilih tiga titik ialah:

$[x_1, h(x_1)]$, $[x_2, h(x_2)]$ dan $[x_3, h(x_3)]$ ....(2.2.1)

yang melewati kurvanya (lihat gambar 2.2.a).



Gambar 2.2.a.

Dalam pemilihan ke tiga titik tersebut dapat dirubah dengan syarat titik x (yaitu titik untuk mencari fungsi h(x) memenuhi dalam:

$$x_1 \leq x \leq x_3$$

Didefinisikan Polinom derajat dua dalam x adalah:

$$P(x) = C_2x^2 + C_1x + C_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.2.)$$

Apabila dari (2.2.1.) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.2.2.) maka akan menghasilkan:

$$\left.\begin{aligned} h(x_1) &= C_2x_1^2 + C_1x_1 + C_0 \\ h(x_2) &= C_2x_2^2 + C_1x_2 + C_0 \\ h(x_3) &= C_2x_3^2 + C_1x_3 + C_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2.2.3.)$$

Untuk menyelesaikan lebih lanjut digunakan tiga fungsi sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1(x) &= (x - x_2)\ (x - x_3) \\ \Pi_2(x) &= (x - x_1)\ (x - x_3) \\ \Pi_3(x) &= (x - x_1)\ (x - x_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2.2.4.)$$

Persamaan (2.2.4.) ini adalah bentuk lain dari polinomial

- product / pengali

derajat dua dalam x. Dengan diasumsikan harga x_1, x_2 dan x_3 berlainan maka akan didapat:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1(x_1) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \neq 0 \\ \Pi_2(x_2) &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \neq 0 \\ \Pi_3(x_3) &= (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2.2.5.)$$

sedangkan:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1(x_2) &= (x_2 - x_2)(x_2 - x_3) = 0 \\ \Pi_2(x_1) &= (x_1 - x_1)(x_1 - x_3) = 0 \\ \Pi_3(x_1) &= (x_1 - x_1)(x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2.2.6.)$$

Persamaan polinom derajat dua P(x) dari (2.2.2.) ditulis kembali dalam bentuk Π_1, Π_2 dan Π_3 menjadi:

$$P(x) = d_1\Pi_1(x) + d_2\Pi_2(x) + d_3\Pi_3(x) \quad \ldots\ldots\ldots(2.2.7.)$$

dengan d_1, d_2 dan d_3 adalah tiga parameter yang dapat berubah.

Jika $x = x_1$ disubstitusikan dalam (2.2.7.) dan dengan menggunakan (2.2.5.) serta (2.2.6.) akan menghasilkan:

$$P(x_1) = d_1\Pi_1(x_1) + d_2\Pi_2(x_1) + d_3\Pi_3(x_1)$$
$$P(x_1) = d_1\Pi_1(x_1) + 0 + 0$$

maka: $$d_1 = \frac{h(x_1)}{\Pi_1(x_1)}$$

dan untuk $x = x_2$ maka:

$$P(x_2) = d_1\Pi_1(x_2) + d_2\Pi_2(x_2) + d_3\Pi_3(x_2)$$
$$= 0 + d_2\Pi_2(x_2) + 0$$

maka: $$d_2 = \frac{h(x_2)}{\Pi_2(x_2)}$$

dan untuk $x = x_3$

$$P(x_3) = d_1\Pi_1(x_3) + d_2\Pi_2(x_3) + d_3\Pi_3(x_3)$$
$$= 0 + 0 + d_3\Pi_3(x_3)$$

maka: $$d_3 = \frac{h(x_3)}{\Pi_3(x_3)}$$

sehingga persamaan (2.2.7.) menjadi:

$$P(x) = h(x_1)\,\frac{\prod_1(x)}{\prod_1(x_1)} + h(x_2)\,\frac{\prod_2(x)}{\prod_2(x_2)} + h(x_3)\,\frac{\prod_3(x)}{\prod_3(x_3)} \quad \ldots(2.2.8)$$

Dengan persamaan (2.2.4.), maka persamaan (2.2.8.) menjadi:

$$\left.\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{(x - x_2)\,(x - x_3)}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)}\,.\,h(x_1) \\ & + \frac{(x - x_1)\,(x - x_3)}{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)}\,.\,h(x_2) \\ & + \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)}{(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)}\,.\,h(x_3) \end{aligned}\right\} \ldots(2.2.9)$$

Jadi persamaan polinomial derajat dua yang melalui tiga titik x_1, x_2 dan x_3 dapat disajikan dengan persamaan (2.2.9.).

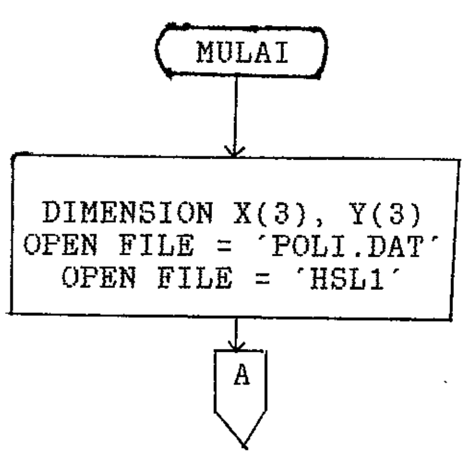
Contoh:

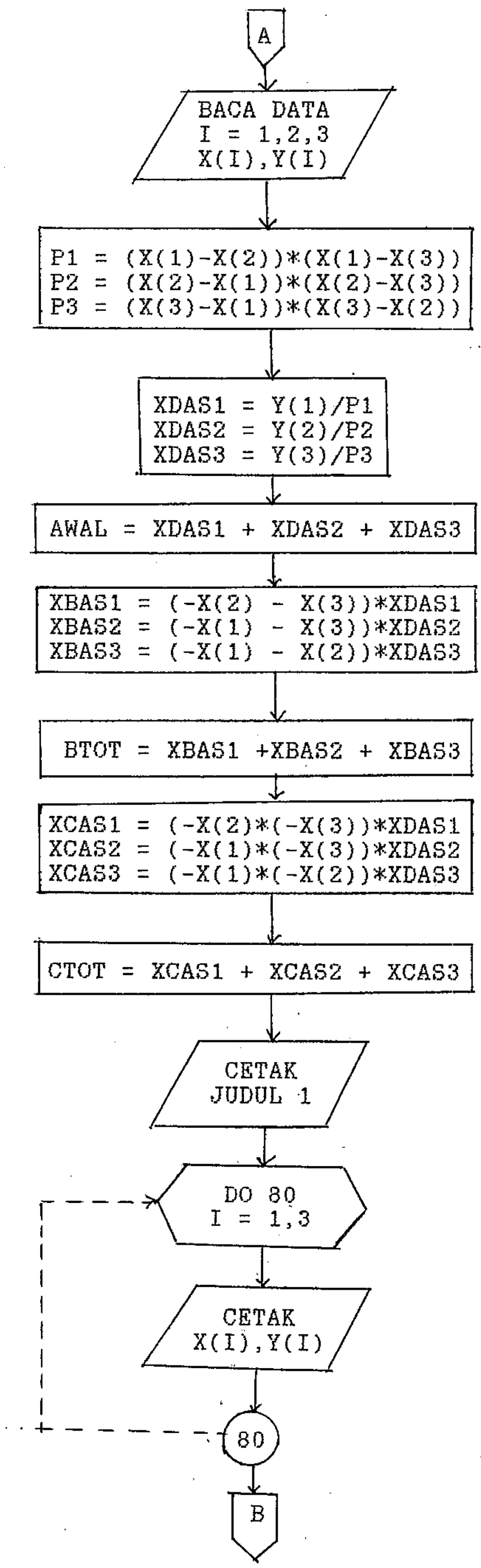
Dari tabel berikut, tentukanlah fungsi pendekatannya (polinomial derajat dua).

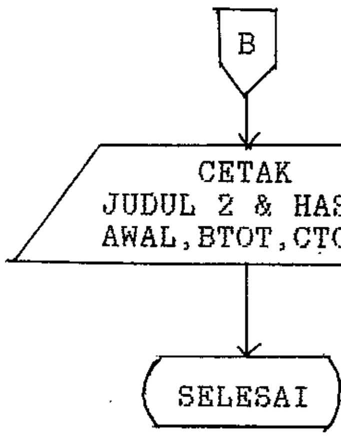
x	0	3	4
y = h(x)	6	18	34

Penyelesaian:

Diagram alirnya:




A
BACA DATA
I = 1,2,3
X(I),Y(I)
P1 = (X(1)-X(2))*(X(1)-X(3))
P2 = (X(2)-X(1))*(X(2)-X(3))
P3 = (X(3)-X(1))*(X(3)-X(2))
XDAS1 = Y(1)/P1
XDAS2 = Y(2)/P2
XDAS3 = Y(3)/P3
AWAL = XDAS1 + XDAS2 + XDAS3
XBAS1 = (-X(2) - X(3))*XDAS1
XBAS2 = (-X(1) - X(3))*XDAS2
XBAS3 = (-X(1) - X(2))*XDAS3
BTOT = XBAS1 +XBAS2 + XBAS3
XCAS1 = (-X(2)*(-X(3))*XDAS1
XCAS2 = (-X(1)*(-X(3))*XDAS2
XCAS3 = (-X(1)*(-X(2))*XDAS3
CTOT = XCAS1 + XCAS2 + XCAS3
CETAK
JUDUL 1
DO 80
I = 1,3
CETAK
X(I),Y(I)
80
B




```
C234567890
C *** PROGRAM INTERPOLASI POLINOM DERAJAD DUA
C *** PROGRAM IFDD
C
      DIMENSION X(3),Y(3)
      OPEN(1,FILE='POLI.DAT')
      OPEN(2,FILE='HSL1')
      READ(1,20)(X(I),I=1,3)
      READ(1,20)(Y(I),I=1,3)
   20 FORMAT(3F5.1)
      P1=(X(1)-X(2))*(X(1)-X(3))
      P2=(X(2)-X(1))*(X(2)-X(3))
      P3=(X(3)-X(1))*(X(3)-X(2))
      XDAS1=Y(1)/P1
      XDAS2=Y(2)/P2
      XDAS3=Y(3)/P3
C *** PERHITUNGAN KONSTAN POLINOM DERAJAT DUA
      AWAL=XDAS1+XDAS2+XDAS3
      XBAS1=(-X(2)-X(3))*XDAS1
      XBAS2=(-X(1)-X(3))*XDAS2
      XBAS3=(-X(1)-X(2))*XDAS3
      BTOT=XBAS1+XBAS2+XBAS3
      XCAS1=(-X(2))*(-X(3))*XDAS1
      XCAS2=(-X(1))*(-X(3))*XDAS2
      XCAS3=(-X(1))*(-X(2))*XDAS3
      CTOT=XCAS1+XCAS2+XCAS3
C
C *** PENULISAN HASIL AKHIR
      WRITE(2,70)
   70 FORMAT(//,5X,'  DARI DATA-DATA BERIKUT ',//,
     *8X,'  X            Y = H(X)  ',/)
      DO 80 I=1,3
      WRITE(2,90)X(I),Y(I)
   90 FORMAT(8X,F5.2,9X,F5.2)
   80 CONTINUE
      WRITE(2,100)AWAL,BTOT,CTOT
  100 FORMAT(//,5X,'BENTUK PERSAMAAN PILINOM DERAJAT ',
     *'DUA ADALAH  :',//,8X,'P (X) = ',F5.2,' X**2    ',
     *F5.2,' X + ',F5.2)
      CLOSE(1)
      END
```

```
DARI DATA-DATA BERIKUT

      X            Y = H(X)

     0.00            6.00
     3.00           18.00
     4.00           34.00

BENTUK PERSAMAAN PILINOM DERAJAT DUA ADALAH  :
   P (X) =  3.00 X**2   -5.00 X +  6.00
```

2.3. INTERPOLASI LAGRANGE

Dengan Interpolasi Lagrange adalah merupakan salah satu metode untuk mencari harga pendekatan fungsi dari data yang ditabelkan dengan polinom derajat tinggi.

Dalam Interpolasi Lagrange ini kita gunakan n titik serta polinomial berderajat (n-1) yang melalui n titik tersebut.

Didefinisikan polinom derajat (n-1) adalah:

$$P(x) = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + C_1x + C_0 \quad \ldots(2.3.1.)$$

Apabila polinom (2.3.1.) adalah persamaan pendekatan yang merupakan hasil interpolasi dari n titik yang dipilih, yaitu:

$$[x_1,\ h(x_1)],\ [x_2,\ h(x_2)],\ \ldots\ldots\ldots,\ [x_n,\ h(x_n)]$$

maka akan didapat:

$$\left.\begin{array}{l}
h(x_1) = C_{n-1}x_1^{\,n-1} + C_{n-2}x_1^{\,n-2} + \ldots\ldots + C_1x_1 + C_0 \\
h(x_2) = C_{n-1}x_2^{\,n-1} + C_{n-2}x_2^{\,n-2} + \ldots\ldots + C_1x_2 + C_0 \\
h(x_3) = C_{n-1}x_3^{\,n-1} + C_{n-2}x_3^{\,n-2} + \ldots\ldots + C_1x_3 + C_0 \\
\quad\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
\quad\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
h(x_i) = C_{n-1}x_i^{\,n-1} + C_{n-2}x_i^{\,n-2} + \ldots\ldots + C_1x_i + C_0 \\
\quad\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
\quad\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
h(x_n) = C_{n-1}x_n^{\,n-1} + C_{n-2}x_n^{\,n-2} + \ldots\ldots + C_1x_n + C_0
\end{array}\right\}\ldots\ldots$$

.......adalah persamaan (2.3.2.).

Persamaan (2.3.2.) adalah terdiri n persamaan di

dalam n perubah C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1} yang koefisiennya ditentukan oleh harga x_1, x_2, x_3, ..., x_n.
Persamaan ini mempunyai penyelesaian seperti pada penyelesaian Interpolasi polinom derajat dua.
Maka kita gunakan n fungsi berikut yang merupakan polinom derajat (n-1) ialah:

$$\left.\begin{array}{l}
\Pi_1(x) = (x-x_2)(x-x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_n) \\
\Pi_2(x) = (x-x_1)(x-x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_n) \\
\Pi_3(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_n) \\
\quad .. \qquad\qquad .. \qquad\qquad\qquad\qquad .. \\
\quad .. \qquad\qquad .. \qquad\qquad\qquad\qquad .. \\
\Pi_i(x) = (x-x_1)\ (x-x_2) \ldots (x-x_{i-1})\ (x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n) \\
\quad .. \qquad\qquad .. \qquad\qquad\qquad\qquad .. \\
\Pi_n(x) = (x-x_1)\ (x-x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_{n-1})
\end{array}\right\} \ldots$$

........adalah persamaan (2.3.3.).

Penulisan lain persamaan (2.3.3.) adalah:

$$\Pi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j); \text{ dimana } i = 1,2,3,\ldots,n \ldots (2.3.4.)$$

Persamaan (2.3.4.) untuk $x = x_i$ maka akan menghasilkan:

$$\Pi_i(x_i) \neq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.5.)$$

Dan jika semua x_i berlainan maka:

$$\Pi_i(x_j) = 0 \text{ untuk } i \neq j \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.6.)$$

Maka P(x) bila dituliskan dalam bentuk $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ akan didapat:

$$P(x) = d_1 \Pi_1(x) + d_2 \Pi_2(x) + \ldots\ldots + d_n \Pi_n(x)$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \Pi_i(x) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.7.)$$

Persamaan (2.3.7.) adalah bentuk umum polinomial derajat (n-1) dalam bentuk Π dengan n parameter yang dapat berubah-ubah, yaitu: d_1, d_2, d_3, ..., d_n.

Jika $x = x_k$ disubstitusikan dalam (2.3.7.) serta mengingat persamaan (2.3.5.) dan (2.3.6.) maka akan didapat:

$$P(x_k) = d_k \prod_k (x_k)$$

maka semua suku di dalam jumlahan dari persamaan (2.3.7.) akan sama dengan nol, kecuali suku yang ke k.

Supaya dapat menyelesaikan persamaan (2.3.2.).

$$h(x_k) = P(x_k)$$

sehingga:

$$d_k = \frac{h(x_k)}{\prod_k (x_k)} \text{ ; untuk } k = 1, 2, \ldots, n \ldots (2.3.8.).$$

Maka persamaan (2.3.7.) akan menjadi:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \frac{\prod_i (x)}{\prod_i (x_i)}$$

Dengan dasar persamaan (2.3.4.) maka:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) \right] / \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \right]$$

maka:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.9.)$$

Maka bentuk terakhir ini disebut Rumus Interpolasi Lagrange.

<u>Contoh:</u>

Tentukan ln. 33, jika diketahui:

ln 2 = 0,69315

ln 3 = 1,09861

ln 5 = 1,60944

ln 6 = 1,79176

ln 7 = 1,94591

Dengan menggunakan methoda Lagrange:

<u>**Penyelesaian:**</u>

Diagram alir:

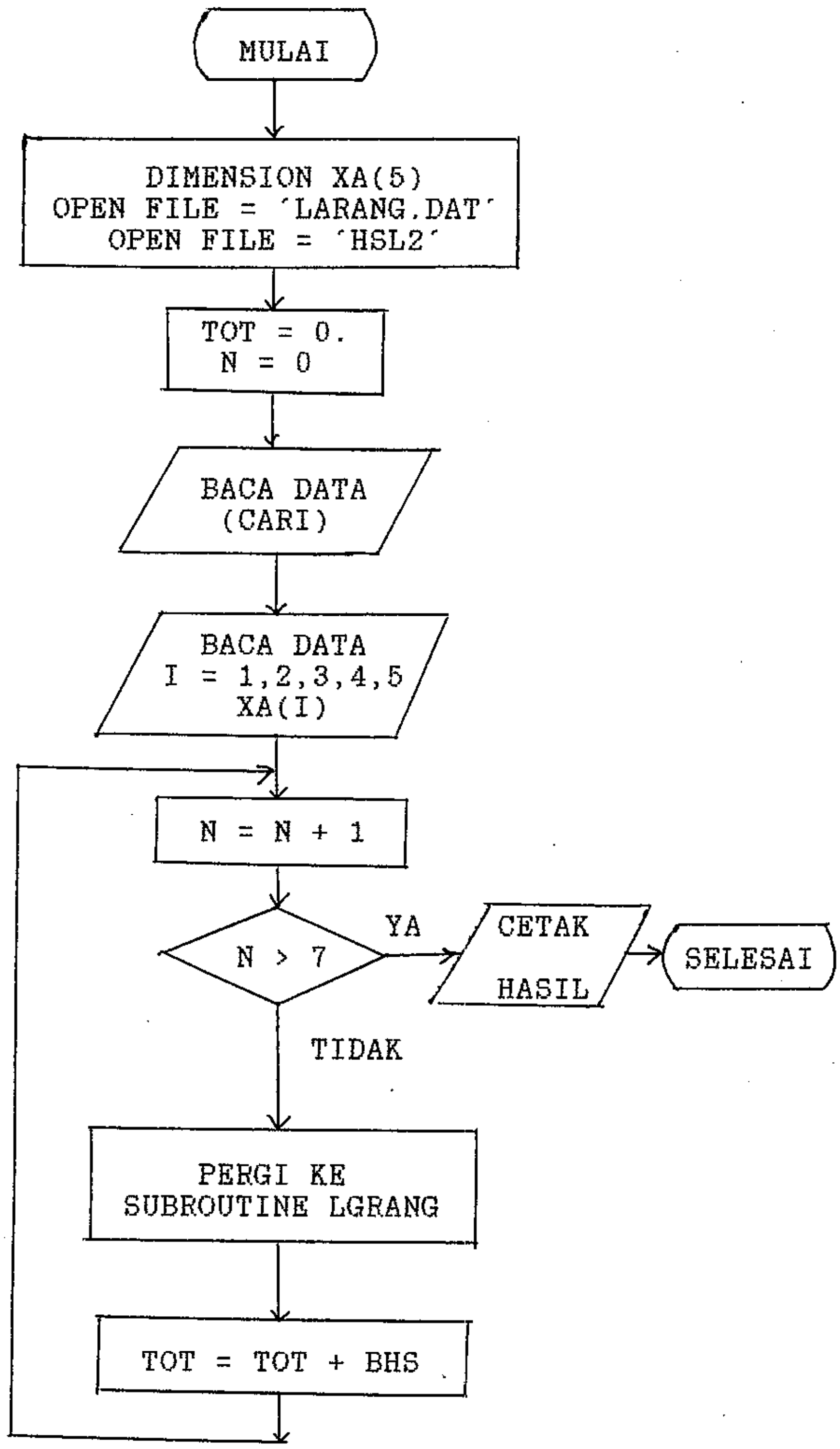
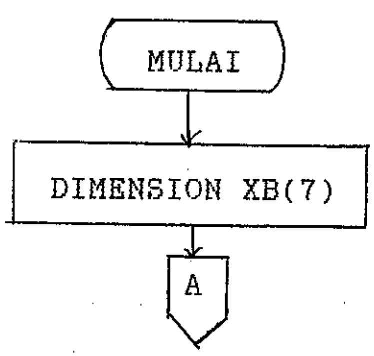
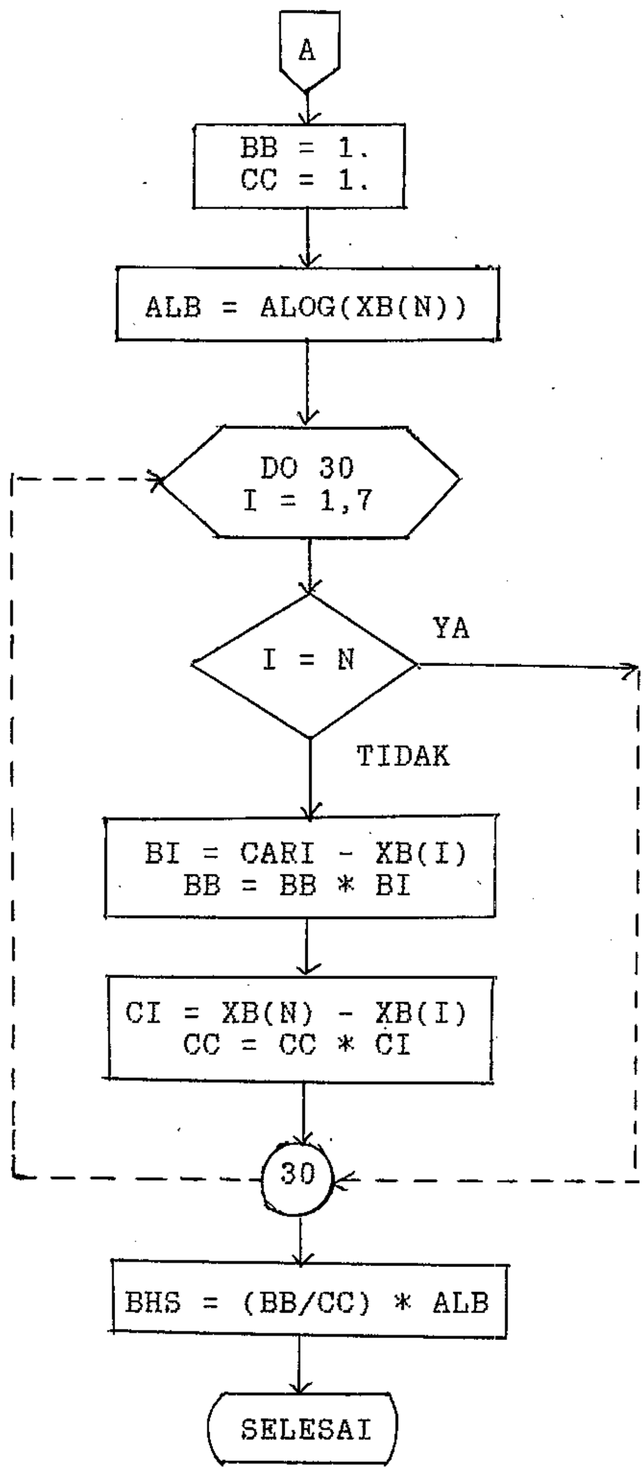


Diagram alir untuk SUBROUTINE LGRANG






```
C23456789
C *** PROGRAM INTERPOLASI LAGRANGE
C *** UNTUK MENGHITUNG HARGA PENDEKATAN  DARI  Ln (X)
C *** DIMANA  20 < X < 35
C *** DIPROSES DI LABORATORIUM UPT KOMPUTER UNDIP.
C
      DIMENSION XA(5)
      OPEN(1,FILE='LARANG.DAT')
      OPEN(2,FILE='HSL2')
      TOT=0.
      N=0
      READ(*,10)CARI
      READ(1,5)(XA(I),I=1,5)
    5 FORMAT(5F5.1)
```

```
   10 FORMAT(F5.2)
   15 N=N+1
      IF (N.GT.7) GOTO 50
      CALL LGRANG(N,CARI,BHS)
      TOT=TOT+BHS
      GOTO 15
   50 WRITE(2,60)
   60 FORMAT(/,2X,'HASIL PERHITUNGAN DENGAN ',
     *'INTERPOLASI LAGRANGE',/,2X,(40('-')),/,2X,
     *'BILA DEKETAHUI  :')
      DO 70 I=1,5
      ALN=ALOG(XA(I))
      WRITE(2,80)XA(I),ALN
   80 FORMAT(/,5X,'LOG. NATURAL ',F5.1,' = ',F9.5)
   70 CONTINUE
      WRITE(2,90)CARI,TOT
   90 FORMAT(/,2X,'HARGA PENDEKATAN LOG. NATURAL ',
     *F5.1,' = ',F9.5)
      STOP
      END
C *** PERHITUNGAN METODE LAGRANGE
      SUBROUTINE LGRANG(N,CARI,BHS)
      DIMENSION XB(7)
      DATA XB/20.0,21.0,24.0,25.0,28.0,30.0,35.0/
      BB=1.
      CC=1.
      ALB=ALOG(XB(N))
      DO 30 I=1,7
      IF (I.EQ.N) GOTO 30
      BI=CARI-XB(I)
      BB=BB*BI
      CI=XB(N)-XB(I)
      CC=CC*CI
   30 CONTINUE
      BHS=(BB/CC)*ALB
      RETURN
      END
```

```
  HASIL PERHITUNGAN DENGAN INTERPOLASI LAGRANGE
  ----------------------------------------
  BILA DEKETAHUI  :

     LOG. NATURAL   2.0 =    0.69315

     LOG. NATURAL   3.0 =    1.09861

     LOG. NATURAL   5.0 =    1.60944

     LOG. NATURAL   6.0 =    1.79176

     LOG. NATURAL   7.0 =    1.94591

  HARGA PENDEKATAN LOG. NATURAL  33.0 =    3.49651
```

2.4. RUMUS NEWTON FORWARD

Bila $P_n(x)$ suatu polinomial derajat n dapat ditulis sebagai:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{(n-1)}) \quad \ldots(2.4.1)$$

Dimana koefisien a_m (m = 0, 1, 2, ...n) dapat ditentukan oleh persamaan:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(x_i) = y_i \\ \text{untuk: } i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n \end{array}\right\} \ldots\ldots(2.4.2.)$$

yang merupakan suku-suku pada beda muka/Forward Difference (Δ).

Persamaan (2.4.1.) dapat direduksi menjadi:

$$\left.\begin{array}{ll} P_n(x_0) & = a_0 = y_0 \\ P_n(x_1) & = a_0 + a_1(x_1-x_0) = y_1 \\ P_n(x_2) & = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = y_2 \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ P_n(x_n) & = a_0 + a_1(x_n-x_0) + a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + \ldots\ldots \\ & + a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{(n-1)}) = y_n \end{array}\right\} \ldots\ldots(2.4.3.)$$

Jika $(x_j - x_i) = (j - i)h$

untuk $j \neq i$ dan j = 1, 2, 3, ..., n $i = \emptyset, 1, 2, \ldots n-1$

disubstitusikan ke dalam persamaan (2.4.3.) maka persamaan menjadi:

$$\left.\begin{array}{ll} y_0 & = a_0 \\ y_1 & = a_0 + a_1.h \\ y_2 & = a_0 + a_1.2h + a_2.2h.h \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ y_n & = a_0 + a_1.nh + a_2.nh.(n-1)h + \ldots\ldots + a_n.(n!)h^n \end{array}\right\} \ldots\ldots$$

......adalah persamaan (2.4.4.).

Dari persamaan (2.4.4.) dapat kita tentukan harga a_0, a_1, a_2, ..., a_n yaitu sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_1 &= (y_1 - y_0) / h = \Delta y_0 / h \\
a_2 &= (y_2 - 2y_1 + y_0) / 2h^2 = \Delta^2 y_0 / 2!h^2 \\
a_3 &= (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) / 6h^3 = \Delta^3 y_0 / 3!h^3 \\
&.. \qquad .. \qquad .. \\
&.. \qquad .. \qquad .. \\
a_n &= (y_n - ny_{(n-1)} + \ldots + y_0)/(nh(n-1)h\ldots h) \\
&= \Delta^n y_0 / n!h^n
\end{aligned}\right\} \ldots (2.4.5)$$

Kemudian persamaan (2.4.5.) yang baru saja didapat ini disubstitusikan ke dalam persamaan (2.4.1.) maka akan menghasilkan:

$$\left.\begin{aligned}
P_n(x) = y_0 &+ \frac{\Delta y_0}{h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x-x_0)(x-x_1) \\
&+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots\ldots \\
&+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_0)(x-x_1) \ldots\ldots (x-x_{(n-1)})
\end{aligned}\right\} \ldots$$

........persamaan (2.4.6.).

jika:

$$p = \frac{(x - x_0)}{h}$$

$$(p - j) = \frac{(x - x_j)}{h} \text{ ,untuk } j = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$$

maka persamaan (2.4.6.) akan menjadi:

$$\left.\begin{aligned}
P_n(p) = y_0 &+ p\,\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \\
&\ldots\ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-(n-1))}{n!} \Delta^n y_0
\end{aligned}\right\}$$

........persamaan (2.4.7.).

Dari persamaan yang dihasilkan ini (persamaan 2.4.7.) adalah merupakan Rumus Newton Forward (rumus Interpolasi depan Newton).

<u>Contoh:</u>

Dari tabel di bawah, dengan menggunakan Rumus Newton Forward, dengan n = 5.

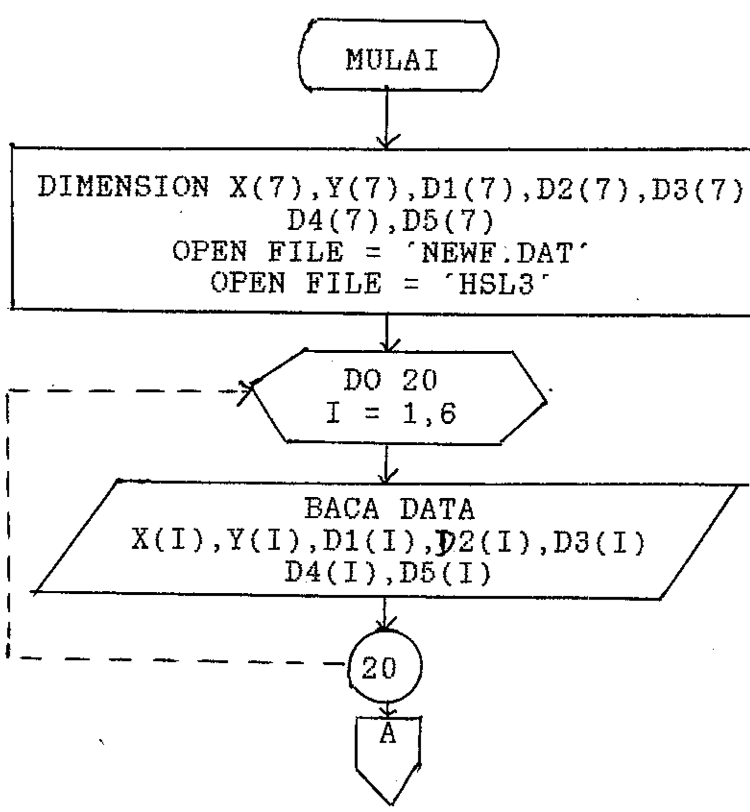
Hitunglah harga pendekatan dari $\sqrt{1,008}$, dengan menggunakan tabel di bawah.

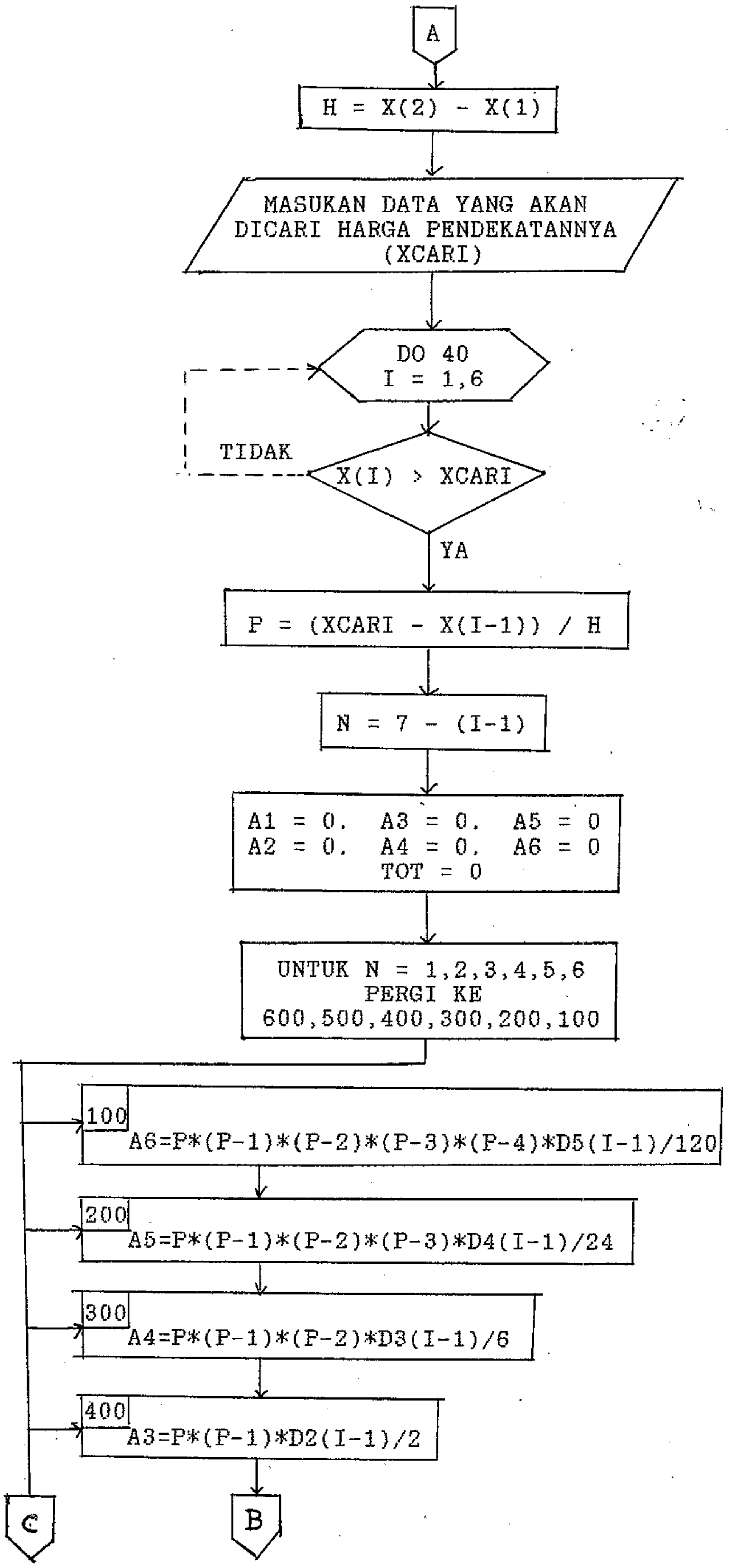
<u>Tabel:</u>

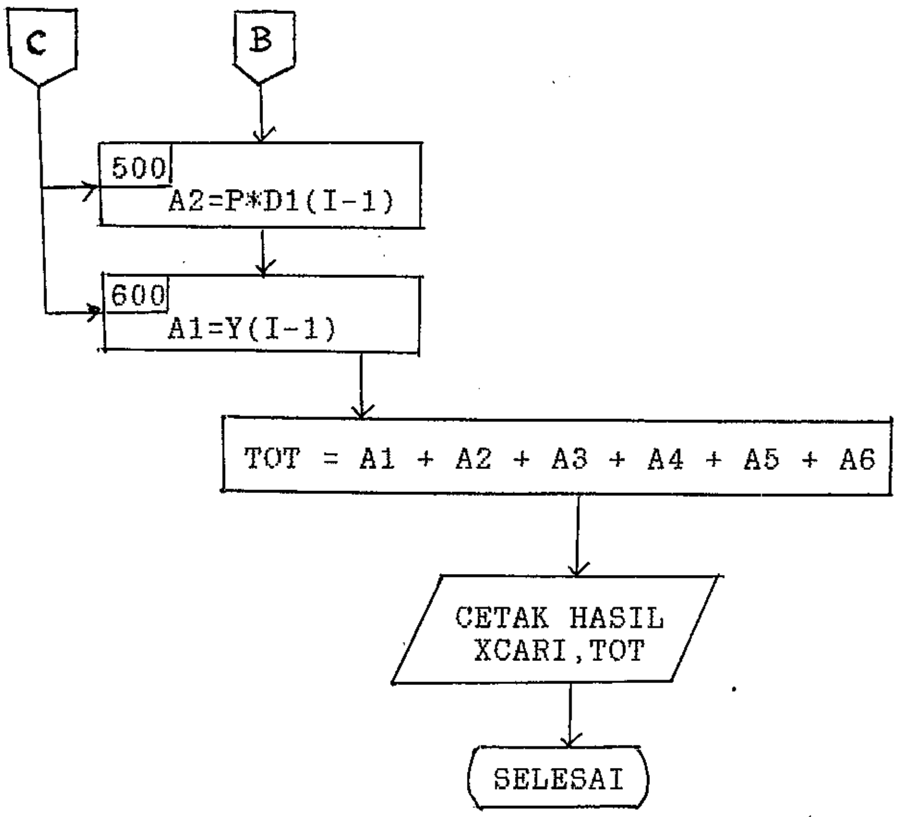
x	$y(x) = \sqrt{x}$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1,00	1,0000					
		0,0050				
1,01	1,0050		0,0000			
		0,0050		-0,0001		
1,02	1,0100		-0,0001		0,0002	
		0,0049		0,0001		0,0003
1,03	1,0149		0,0000		-0,0001	
		0,0049		0,0000		
1,04	1,0198		0,0000			
		0,0049				
1,05	1,0247					

<u>Penyelesaian:</u>

<u>Diagram alirnya:</u>




A
H = X(2) - X(1)
MASUKAN DATA YANG AKAN
DICARI HARGA PENDEKATANNYA
(XCARI)
DO 40
I = 1,6
TIDAK
X(I) > XCARI
YA
P = (XCARI - X(I-1)) / H
N = 7 - (I-1)
A1 = 0. A3 = 0. A5 = 0
A2 = 0. A4 = 0. A6 = 0
TOT = 0
UNTUK N = 1,2,3,4,5,6
PERGI KE
600,500,400,300,200,100
100
A6=P*(P-1)*(P-2)*(P-3)*(P-4)*D5(I-1)/120
200
A5=P*(P-1)*(P-2)*(P-3)*D4(I-1)/24
300
A4=P*(P-1)*(P-2)*D3(I-1)/6
400
A3=P*(P-1)*D2(I-1)/2
C
B




```
C234567890
C *** PROGRAM UNTUK RUMUS NEWTON FORWARD
C *** DIBUAT DI LABORATORIUM UPT KOMPUTER UNDIP
C *** OLEH  : SATOTO SIDI PURNOMO
      DIMENSION X(7),Y(7),D1(7),D2(7),D3(7),D4(7),D5(7)
      OPEN(1,FILE='NEWF.DAT')
      OPEN(2,FILE='HSL3')
      DO 20 I=1,6
      READ(1,10)X(I),Y(I),D1(I),D2(I),D3(I),D4(I),D5(I)
   10 FORMAT(7F8.4)
   20 CONTINUE
      H=X(2)-X(1)
      WRITE(2,30)
   30 FORMAT(/,5X,'MASUKAN BILANGAN ANTARA 1.00 ',
     *'DAN 1.05 ',/,5X,'DENGAN BENTUK  F5.3  ',/)
      READ(*,35)XCARI
   35 FORMAT(F5.3)
      DO 40 I=1,6
   40 IF (X(I).GT.XCARI) GOTO 50
   50 P=(XCARI-X(I-1))/H
      N=7-(I-1)
      A1=0.
      A2=0.
      A3=0.
      A4=0.
      A5=0.
      A6=0.
      TOT=0.
      GOTO (600,500,400,300,200,100),N
  100 A6=P*(P-1)*(P-2)*(P-3)*(P-4)*D5(I-1)/120.
  200 A5=P*(P-1)*(P-2)*(P-3)*D4(I-1)/24.
  300 A4=P*(P-1)*(P-2)*D3(I-1)/6.
  400 A3=P*(P-1)*D2(I-1)/2.
  500 A2=P*D1(I-1)
  600 A1=Y(I-1)
```

```
      TOT=A1+A2+A3+A4+A5+A6
      WRITE(2,70)XCARI,TOT
   70 FORMAT(//,5X,'HASIL AKHIR PERHITUNGAN PENDEKATAN ',
     *'DG RUMUS NEWTON FORWARD',/,5X,(58('-')),//,
     *10X,' Y = SQRT (X) ',/,10X,' Y = SQRT (',F5.3,
     *') = ',F9.6)
      CLOSE(1)
      END
```

```
MASUKAN BILANGAN ANTARA 1.00 DAN 1.05
DENGAN BENTUK  F5.3

1.008

HASIL AKHIR PERHITUNGAN PENDEKATAN DG RUMUS NEWTON FORWARD
----------------------------------------------------------

          Y = SQRT (X)
          Y = SQRT (1.008) =  1.003997
```